7. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 14 Q, Winter 2025/26
Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 7.1 Zeigen Sie:

1) Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen sind offen.

2) $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \,]-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}[\; = \; [0,1]$,

   d.h. der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen braucht nicht offen zu sein.

Aufgabe 7.2

1) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie:

   $D_1 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \}$ ist abgeschlossen.

   $D_2 = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \neq g(\bar{x}) \}$ ist offen.

2) Untersuchen Sie, ob folgende Mengen offen sind und ob D_4 abgeschlossen ist.

   $D_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < x(4-x) \}$

   $D_4 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \}$

Aufgabe 7.3 Zeigen Sie: Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$

$$GL_n(\mathbb{R}) \; = \; \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar} \}$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$; dabei identifiziere man $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$.